11 -Дәріс

Тақырыбы: Жоғары ретті туындылар мен дифференциалдар. Лейбниц формуласы.

Жоғары ретті туындылар. f функцияның (a,b) аралығында туындысы бар болса, онда $f'(x)$ белгілі функция болады. Өз кезегінде бірінші туындының да (a,b) аралығында туындысы болуы мүмкін. Бұл жағдайда оны f функциясының **екінші ретті туындысы** дейді және $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$ немесе $y'' = (y')'$ арқылы белгілейді.

Жалпы f - тің $(n-1)$ ретті туындысының туындысы f функцияның n **- ші ретті туындысы** деп атайды да

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \text{ немесе } y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$$

деп белгілейді. n - рет дифференциалданатын $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының қосындысы мен көбейтіндісі үшін келесі дифференциалдау ережесі орындалады:

1. $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$;

Лейбниц формуласы:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \ldots + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \ldots + u \cdot v^{(n)}$$

мұнда $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0! = 1! = 1$. Бұл теңдіктерді математикалық индукция әдісін пайдаланып дәлелдеуге болады.

Жоғары ретті дифференциал. f(x) (a,b) аралығында n -рет дифференциалданатын функция, x -тәуелсіз айнымалы. Онда f функциясының x нүктесіндегі $dy = f'(x)dx$ **бірінші дифференциалынан** алынған дифференциал f функциясының **екінші дифференциалы** деп аталады да $d^2y = d(dy)$ арқылы белгіленеді, және $d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] =$

$$= dx \cdot d[f'(x)] = dx \cdot f''(x)dx = f''(x)dx^2 \text{ тең } (dx - const)$$

$y = f(x)$ функциясының n **- ретті дифференциалы** деп f функциясының $(n-1)$ - ретті дифференциалының дифференциалын айтады және оны келесі түрде белгілейді.

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

n – ші ретті дифференциал үшін

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n,$$

теңдігі орындалады. n – ші ретті дифференциалдар үшін келесі ережелер орындалады:

1) $d^n(u+v) = d^n u + d^n v$;

2) $d^n(u \cdot v) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}u \cdot d^k v.$